ESSAIM
12, rue des Frères Lumière
68093 MULHOUSE Cedex

Concours EIA

IUSPIM
Domaine Univ. de Saint Jérôme
13397 MARSEILLE Cedex 20

Session de mai 1998

Epreuve de MATHEMATIQUES - durée : 3 heures

Classes Préparatoires ATS et TSI

Attention	- l'épreuve comporte un exercice et un problème indépendants - aucun document autorisé - l'usage de la calculatrice est interdit

Exercice

$$\text{Soit } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Quel est le rang de A ?

2. Diagonaliser la matrice A.

3. Applications

a. Exprimer en fonction de A et de n, $n \in \mathbb{N}$, les puissances A^n de A.

b. Les fonctions x, y et z étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant $x(0) = y(0) = z(0) = 2$, intégrer le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) - z(t) \\ z'(t) = 2x(t) - 2y(t) \end{cases}$$

Problème

Dans ce problème on propose l'étude de quelques propriétés d'une famille de polynômes.
On définit sur [-1 ; 1] pour tout entier naturel n les polynômes T_n par :

$T_n(x) = \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} C_n^{2p} x^{n-2p}\left(x^2-1\right)^p$ où $E\left(\frac{n}{2}\right)$ désigne la partie entière de $\frac{n}{2}$, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur à $\frac{n}{2}$.

I. PREMIÈRE PARTIE : ÉTUDE DES POLYNÔMES T_n

1. Quel est le degré de ces polynômes et quel est le coefficient du terme de plus haut degré ?
2.
   a. Démontrer que $T_n(cos(t)) = Re\left((cos(t)+i\cdot sin(t))^n\right)$, où Re($z$) désigne la partie réelle du nombre complexe z.
   b. En déduire que $T_n(x) = cos\left(n(Arccos(x))\right)$
3. Démontrer que $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2x\,T_n(x)$.
4. Déterminer les polynômes T_n pour $n \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$
5. Démontrer que T_n admet exactement n zéros distincts.
6. Démontrer que T_n atteint ses valeurs extrêmes pour $x = cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$,
   où $k \in \{0 ; 1 ; \ldots ; n\}$

II. DEUXIÈME PARTIE : ESPACE DES POLYNÔMES

On désigne par C l'espace vectoriel $C^0\left([-1 ; 1]\right)$ des fonctions continues sur [-1 ; 1]. On définit l'application φ de C XC dans $\mathbb{R}$ par $\varphi(f ; g) = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)\cdot g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$.
On désigne par E_n l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

1. Démontrer que $\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ converge pour tout élément f de C.
2. Montrer que φ est un produit scalaire sur C.
3. Démontrer que la famille des polynômes T_k pour $k \in \{0 ; 1 ; \ldots ; n\}$ constitue une base orthogonale de E_n.
   En déduire une base orthonormale $\left\{e_k ;\ k \in \{0 ; 1 ; \cdots ; n\}\right\}$ de E_n.

III. TROISIÈME PARTIE : APPROXIMATION DE FONCTIONS

1. On considère l'ensemble F_n des polynômes normalisés de degré n, c'est-à-dire les éléments de E_n de degré n de la forme $x^n + Q$ où Q est un polynôme de degré au plus n-1.

a. Démontrer que $\tau_n = \frac{1}{2^{n-1}} T_n \in F_n$.

b. Démontrer que $\forall\ P \in F_n\ ;\ \frac{1}{2^{n-1}} = \max_{-1\le x\le 1} |\tau_n(x)| \le \max_{-1\le x\le 1} |P(x)|$, pour cela on étudiera le signe de $\tau_n(x) - P(x)$ pour $x = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$,

où $k \in \{0\ ;\ 1\ ;\ \ldots\ ;\ n\}$.

c. En déduire que τ_n réalise la meilleure approximation de 0 sur [-1 ; 1] dans l'ensemble F_n pour la norme $\|f\| = \max_{-1\le x\le 1} |f(x)|$.

2. Soit l'application p_n de C dans C définie par : $p_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \varphi(f; e_k) e_k$.

Montrer que p_n est un projecteur.

3. Soit f définie sur [-1 ; 1] par $f(x) = \text{Arccos}(x)$.
Déterminer $p_n(f)$ pour $n = 3$.

4. Soit f définie sur [-1 ; 1] par $f(x) = e^x$.
On se propose de démontrer que , pour tout x fixé dans [-1 ; 1], la suite de terme général $p_n(f)(x)$ est convergente.

a. Soit $I_k = \int_0^{\pi} e^{\cos(t)} \cdot \cos(kt) \cdot dt$ pour $k > 1$.

Démontrer que $I_k = \frac{1}{k^2} \int_0^{\pi} \cos(kt) \cdot \left(\cos(t) - \sin^2(t)\right) \cdot e^{\cos(t)} \cdot dt$.

b. En déduire qu'il existe un réel strictement positif M tel que : $|I_k| \le \frac{M\pi}{k^2}$.

c. En déduire un majorant de $|\varphi(f\ ;\ e_k)|$ pour $k > 1$. Puis étudier la convergence de la suite de terme général $p_n(f)(x)$.